

الترتيب و العمليات

تمرين 1

x و y عدنان حقيقيان حيث: $x \leq y$

① قارن $3x - 7y$ و $-5y + x$

② قارن $-\frac{2y+8x}{5}$ و $\frac{7x-11y}{2}$

تمرين 2

x و y و z و t و k أعداد حقيقية حيث:

أطّر التعابير الآتية :

$-9 \leq k \leq -2$	$-10 \leq t \leq 1$	$2 \leq z \leq 5$	$-7 \leq y \leq -4$	$3 \leq x \leq 6$	
$-y + 5x$	$6t + 2y$	$z - x$	$x - y$	$z + t$	$x + y$
$x + y - t + 6z + 13$	$-4y - 16$	$-4t$	$10y$	$-6y$	$5x$
yk	xy	xz	t^2	y^2	x^2
		$\frac{y^2 + 5}{t - 10}$	$\frac{x - t}{y + 10z}$	$\frac{y}{z}$	$\frac{z}{x}$

تمرين 3

قارن كل عددين مما يلي :

$20\sqrt{2}$ و $-7\sqrt{14}$	$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$	$-2\sqrt{10}$ و $-\sqrt{3}$	$3\sqrt{5}$ و $\sqrt{37}$
$\sqrt{27} + 1$ و $3 + \sqrt{3}$	$6 + \sqrt{5}$ و $6 + \sqrt{3}$	$\sqrt{17} - \sqrt{11}$ و $\sqrt{5} - \sqrt{40}$	

تمرين 4

إذا علمت أن : $\begin{cases} 1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \\ 2,23 < \sqrt{5} < 2,24 \end{cases}$ فاعط تأطيرا للعددين : $A = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$ و $B = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

الترتيب و العمليات - حلول

تمرين 1 ⚠ انتبه ← تعليق

معطيات : x و y عدنان حقيقيان حيث : $x \leq y$

① لنقارن $3x - 7y$ و $-5y + x$	② لنقارن $-\frac{2y+8x}{5}$ و $\frac{7x-11y}{2}$
لدينا : $(-5y + x) - (3x - 7y) = -5y + x - 3x + 7y$ $= -2x + 2y = 2(-x + y) = 2(y - x)$ و بما أن $x \leq y$ فإن $x - y \leq 0$ منه $2(x - y) \leq 0$ بالتالي : $-5y + x \leq 3x - 7y$	لدينا : $\frac{7x-11y}{2} + \frac{2y+8x}{5} = \frac{5(7x-11y) + 2(2y+8x)}{10}$ $= \frac{35x - 55y + 4y + 16x}{10} = \frac{51x - 51y}{10} = \frac{51(x-y)}{10}$ و بما أن $x \leq y$ فإن $x - y \leq 0$ منه $\frac{51(x-y)}{10} \leq 0$ بالتالي : $\frac{7x-11y}{2} \leq -\frac{2y+8x}{5}$

تمرين 2 ⚠ انتبه ← تعليق

معطيات	$3 \leq x \leq 6$	$-7 \leq y \leq -4$	$2 \leq z \leq 5$	$-10 \leq t \leq 1$	$-9 \leq k \leq -2$
لنؤطر $x + y$	لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و $-7 \leq y \leq -4$ إذن : $-7 + 3 \leq x + y \leq -4 + 6$ إذن : $-4 \leq x + y \leq 2$	لنؤطر $x - y$	لدينا : $x - y = x + (-y)$ و لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ و لدينا : $3 \leq x \leq 6$ إذن : $3 + 4 \leq x + (-y) \leq 6 + 7$ بالتالي : $7 \leq x - y \leq 13$	لنؤطر $6t + 2y$	لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-60 \leq 6t \leq 6$ لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $-14 \leq 2y \leq -8$ إذن : $-60 + (-14) \leq 6t + 2y \leq 6 + (-8)$ بالتالي : $-74 \leq 6t + 2y \leq -2$
لنؤطر $z + t$	لدينا : $2 \leq z \leq 5$ و $-10 \leq t \leq 1$ إذن : $2 + (-10) \leq z + t \leq 5 + 1$ إذن : $-8 \leq z + t \leq 6$	لنؤطر $z - x$	لدينا : $z - x = z + (-x)$ و لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $-6 \leq -x \leq -3$ و لدينا : $2 \leq z \leq 5$ إذن : $2 + (-6) \leq z + (-x) \leq 5 + (-3)$ بالتالي : $-4 \leq z - x \leq 2$	لنؤطر $-y + 5x$	لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $15 \leq 5x \leq 30$ إذن : $4 + 15 \leq -y + 5x \leq 7 + 30$ بالتالي : $19 \leq -y + 5x \leq 37$
لنؤطر $5x$	لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $15 \leq 5x \leq 30$	لنؤطر $-4y - 16$	لدينا : $-4y - 16 = -4y + (-16)$ لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $16 \leq -4y \leq 28$ منه : $16 + (-16) \leq -4y + (-16) \leq 28 + (-16)$ بالتالي : $0 \leq -4y - 16 \leq 12$	لنؤطر $6t$	لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-60 \leq 6t \leq 6$
لنؤطر $10y$	لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $-70 \leq 10y \leq -40$	لنؤطر x^2	لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $9 \leq x^2 \leq 36$	لنؤطر $-6y$	لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $24 \leq -6y \leq 42$
لنؤطر $-4t$	لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-4 \leq -4t \leq 40$	لنؤطر y^2	لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq y^2 \leq 49$ بالتالي : $16 \leq y^2 \leq 49$	لنؤطر $5x$	لدينا $3 \leq x \leq 6$ منه : $15 \leq 5x \leq 30$
لنؤطر $x + y - t + 6z + 13$	لدينا : $x + y - t + 6z + 13 = x + y + (-t) + 6z + 13$ لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و : $-7 \leq y \leq -4$ و لدينا : $-1 \leq -t \leq 10$ منه : $-10 \leq t \leq 1$ و لدينا : $12 \leq 6z \leq 30$ منه : $2 \leq z \leq 5$ نجمع المتفاوتات فنجد : $20 \leq x + y + (-t) + 6z + 13 \leq 55$	لنؤطر $-4y - 16$	لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $16 \leq -4y \leq 28$ منه : $16 + (-16) \leq -4y + (-16) \leq 28 + (-16)$ بالتالي : $0 \leq -4y - 16 \leq 12$	لنؤطر $6t$	لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-60 \leq 6t \leq 6$
لنؤطر $x + y - t + 6z + 13$	لدينا : $x + y - t + 6z + 13 = x + y + (-t) + 6z + 13$ لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و : $-7 \leq y \leq -4$ و لدينا : $-1 \leq -t \leq 10$ منه : $-10 \leq t \leq 1$ و لدينا : $12 \leq 6z \leq 30$ منه : $2 \leq z \leq 5$ نجمع المتفاوتات فنجد : $20 \leq x + y + (-t) + 6z + 13 \leq 55$	لنؤطر $-4y - 16$	لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $16 \leq -4y \leq 28$ منه : $16 + (-16) \leq -4y + (-16) \leq 28 + (-16)$ بالتالي : $0 \leq -4y - 16 \leq 12$	لنؤطر $6t$	لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-60 \leq 6t \leq 6$
لنؤطر $x + y - t + 6z + 13$	لدينا : $x + y - t + 6z + 13 = x + y + (-t) + 6z + 13$ لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و : $-7 \leq y \leq -4$ و لدينا : $-1 \leq -t \leq 10$ منه : $-10 \leq t \leq 1$ و لدينا : $12 \leq 6z \leq 30$ منه : $2 \leq z \leq 5$ نجمع المتفاوتات فنجد : $20 \leq x + y + (-t) + 6z + 13 \leq 55$	لنؤطر $-4y - 16$	لدينا $-7 \leq y \leq -4$ منه : $16 \leq -4y \leq 28$ منه : $16 + (-16) \leq -4y + (-16) \leq 28 + (-16)$ بالتالي : $0 \leq -4y - 16 \leq 12$	لنؤطر $6t$	لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-60 \leq 6t \leq 6$

⚠ تذكر أنه عندما نضرب متفاوتة في عدد سالب فإننا نغير ترتيب الأطراف.

⚠ لا نستطيع تأطير y^2 مباشرة لأن المتفاوتة $-7 \leq y \leq -4$ تحتوي على أعداد سالبة، لذلك نؤطر $-y$ فنحصل على متفاوتة كل أطرافها موجبة، ثم نؤطر $(-y)^2$ ، ثم نستعمل الخاصية : $(-y)^2 = y^2$

لنؤطر t^2	لنؤطر xz	لنؤطر yk
لدينا $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-10 \leq t \leq 0$ أو $0 \leq t \leq 1$ $0 \leq -t \leq 10$ أو $0 \leq t \leq 1$ منه $0 \leq (-t)^2 \leq 100$ أو $0 \leq t^2 \leq 100$ منه $0 \leq t^2 \leq 100$ أو $0 \leq t^2 \leq 100$ بالتالي: $0 \leq t^2 \leq 100$	لدينا : $2 \leq z \leq 5$ و $3 \leq x \leq 6$ منه : $6 \leq xz \leq 30$ لنؤطر xy لدينا : $-7 \leq y \leq -4$ و $-9 \leq k \leq -2$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ و $2 \leq -k \leq 9$ منه : $4 \times 2 \leq (-y) \times (-k) \leq 7 \times 9$ بالتالي : $8 \leq yk \leq 63$	لدينا : $3 \leq x \leq 6$ و $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ منه : $3 \times 4 \leq x \times (-y) \leq 6 \times 7$ منه : $12 \leq -xy \leq 42$ بالتالي : $-42 \leq xy \leq -12$
<p>← صعوبة هذا التأطير تكمن في كون العدد t مؤطر بين عدد سالب وآخر موجب ، مما يعيق استعمال قاعدة تأطير المربع مباشرة أو حتى تأطير $-t$ ، لذلك نستعمل الحالات : فنؤطر t في الحالة الموجبة ثم في الحالة السالبة ثم نستنتج التأطير من النتائج المحصل عليها.</p> <p>← نذكر أننا نؤطر مستعملين قواعد التأطير وليس بتطبيق تعبير المجهول على الأعداد.</p>	<p>← لاحظ أننا استعملنا نفس تقنية تأطير xy ، لكننا استفدنا من كون : $(-x) \times (-y) = xy$</p> <p>لنؤطر $\frac{z}{x}$</p> <p>لدينا : $\frac{z}{x} = z \times \frac{1}{x}$ لدينا : $3 \leq x \leq 6$ منه : $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3}$ ولدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $2 \times \frac{1}{6} \leq z \times \frac{1}{x} \leq 5 \times \frac{1}{3}$ بالتالي : $\frac{1}{3} \leq \frac{z}{x} \leq \frac{5}{3}$ أو أيضا : $\frac{1}{3} \leq \frac{z}{x} \leq \frac{5}{3}$</p> <p>لنؤطر $\frac{y^2+5}{t-10}$</p> <p>لدينا : $\frac{y^2+5}{t-10} = (y^2+5) \times \frac{1}{t-10}$ لدينا : $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ منه : $16 \leq y^2 \leq 49$ أي : $16 \leq (-y)^2 \leq 49$ منه : $21 \leq y^2+5 \leq 54$ لدينا : $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-20 \leq t-10 \leq -9$ منه : $9 \leq -(t-10) \leq 20$ منه : $\frac{1}{20} \leq \frac{1}{-(t-10)} \leq \frac{1}{9}$ إذن : $21 \times \frac{1}{20} \leq (y^2+5) \times \frac{1}{-(t-10)} \leq 54 \times \frac{1}{9}$ أي : $\frac{21}{20} \leq \frac{(y^2+5)}{t-10} \leq 6$ بالتالي : $-6 \leq \frac{(y^2+5)}{t-10} \leq -\frac{21}{20}$</p>	<p>بما أن قاعدة تأطير جذاء تستوجب أن تكون كل الأعداد موجبة ، فإننا اعتمدنا التقنية التالية : أطرنا $-y$ فتصبح أطراف المتفاوتة $4 \leq -y \leq 7$ كلها موجبة (حتى $-y$ لأن y سالب)، مما سمح لنا بتأطير الجذاء $-xy$ ، و باستعمال قاعدة تأطير المقابل نستطيع تأطير xy.</p> <p>لنؤطر $\frac{y}{z}$</p> <p>لدينا : $\frac{y}{z} = y \times \frac{1}{z}$ لدينا : $-7 \leq y \leq -4$ منه : $4 \leq -y \leq 7$ ولدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{z} \leq \frac{1}{2}$ منه : $4 \times \frac{1}{5} \leq (-y) \times \frac{1}{z} \leq 7 \times \frac{1}{2}$ أي : $\frac{4}{5} \leq \frac{-y}{z} \leq \frac{7}{2}$ بالتالي : $-\frac{7}{2} \leq \frac{y}{z} \leq -\frac{4}{5}$</p>
لنؤطر $\frac{x-t}{y+10z}$		
<p>لدينا : $\frac{x-t}{y+10z} = (x+(-t)) \times \frac{1}{y+10z}$ لدينا : $-10 \leq t \leq 1$ منه : $-1 \leq -t \leq 10$ ولدينا : $3 \leq x \leq 6$ إذن : $2 \leq x+(-t) \leq 16$ لدينا : $2 \leq z \leq 5$ منه : $20 \leq 10z \leq 50$ ولدينا : $-7 \leq y \leq -4$ إذن : $13 \leq y+10z \leq 46$ إذن : $\frac{1}{46} \leq \frac{1}{y+10z} \leq \frac{1}{13}$ منه : $2 \times \frac{1}{46} \leq (x+(-t)) \times \frac{1}{y+10z} \leq 16 \times \frac{1}{13}$ بالتالي : $\frac{1}{23} \leq \frac{x-t}{y+10z} \leq \frac{16}{13}$</p>		
<p>← لاحظ أن التعابير الأخيرة مركبة لذلك فنأطيرها يتطلب كتابتها على شكل جذاءات و مجاميع قصد التمكن من تطبيق قواعد الترتيب.</p>		

لنقارن $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$	لنقارن $-2\sqrt{10}$ و $-\sqrt{3}$	لنقارن $3\sqrt{5}$ و $\sqrt{37}$
لدينا : $(\sqrt{5})^2 = 5$ $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$ $= 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$ $5 + 2\sqrt{6} > 5$: بما أن $\sqrt{2} + \sqrt{3} > \sqrt{5}$: فإن	لدينا : $(\sqrt{3})^2 = 3$ $(2\sqrt{10})^2 = 4 \times 10 = 40$ $40 > 3$: بما أن $2\sqrt{10} > \sqrt{3}$: فإن $-2\sqrt{10} < -\sqrt{3}$: بالتالي	لدينا : $(3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$ و $(\sqrt{37})^2 = 37$ $45 > 37$: بما أن $3\sqrt{5} > \sqrt{37}$: فإن
لنقارن $6 + \sqrt{5}$ و $6 + \sqrt{3}$	لدينا $\sqrt{5} > \sqrt{3}$ منه : $6 + \sqrt{5} > 6 + \sqrt{3}$	لدينا $\sqrt{5} < \sqrt{40}$ منه $\sqrt{5} - \sqrt{40} < 0$ لدينا $\sqrt{17} > \sqrt{11}$ منه $\sqrt{17} - \sqrt{11} > 0$ بالتالي : $\sqrt{5} - \sqrt{40} < \sqrt{17} - \sqrt{11}$
لدينا $\sqrt{5} > \sqrt{3}$ منه : $6 + \sqrt{5} > 6 + \sqrt{3}$	لنقارن $20\sqrt{2}$ و $-7\sqrt{14}$	لنقارن $\sqrt{27} + 1$ و $3 + \sqrt{3}$
لم نقارن المربعين و اكتفينا بمقارنة $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ لوجود العدد 6 في كلتا العددين.	لدينا : $20\sqrt{2} > 0$ و $-7\sqrt{14} < 0$ منه : $20\sqrt{2} > -7\sqrt{14}$	لدينا : $(3 + \sqrt{3})^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$ $= 9 + 6\sqrt{3} + 3 = 12 + 6\sqrt{3}$ و $(\sqrt{27} + 1)^2 = (\sqrt{27})^2 + 2 \times \sqrt{27} \times 1 + 1^2$ $= 27 + 2\sqrt{9 \times 3} + 1 = 28 + 6\sqrt{3}$ بما أن : $12 + 6\sqrt{3} < 28 + 6\sqrt{3}$ فإن : $3 + \sqrt{3} < \sqrt{27} + 1$
	العدد الموجب أكبر من العدد السالب، لذلك لا نقارن المربعات	

معطيات : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ و $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$

② لنؤطر $B = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$	① لنؤطر $A = 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$
لنبسط B أولاً: $B = \frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{(5 + \sqrt{5}) \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5} + 5}{5} = \frac{5(\sqrt{5} + 1)}{5} = \sqrt{5} + 1$ لدينا : $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$ منه : $3,23 < \sqrt{5} + 1 < 3,24$ بالتالي : $3,23 < B < 3,24$	لدينا : $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ منه $7,05 < 5\sqrt{2} < 7,1$ و لدينا : $2,23 < \sqrt{5} < 2,24$ منه $4,46 < 2\sqrt{5} < 4,48$ بالتالي : $11,51 < 5\sqrt{2} + 3\sqrt{5} < 11,58$ أي : $11,51 < A < 11,58$